

# Teoría de juegos en forma extensiva

## Microeconomía III

Facultad de Ciencias Económicas y Administración

Licenciatura en Economía

# Índice

Teoría  
ENPSJ

Ejemplos  
Juegos repetidos: finitos

## Definición

- Un **juego en forma extensiva** es:
  1. un árbol de juego conteniendo un nodo inicial, otros nodos de decisión, nodos terminales, y ramas que conectan cada nodo de decisión con el nodo sucesor
  2. una lista de  $N \geq 1$  jugadores, indexados por  $i, i = 1, \dots, N$
  3. para cada nodo de decisión la asignación del jugador que debe decidir una acción
  4. para cada jugador  $i$ , el conjunto de acciones de  $i$  en cada nodo de decisión en el cual tenga que elegir una acción
  5. la especificación de los pagos de cada jugador en cada nodo terminal

# Representación en forma normal

## Nota

Todo juego en forma extensiva se puede representar a través de un **único** juego forma normal (no se cumple el recíproco)

- Las estrategias puras del juego en forma extensiva serán las estrategias puras del juego en forma normal
- El conjunto de pagos del juego en forma normal dependerá de cómo la combinación de estrategias puras determina la selección de los nodos terminales

# Subjuegos

## Definición

una **estrategia** para el jugador  $i$ ,  $s_i \in S_i$  es una lista completa de acciones, una acción para cada nodo de decisión en el cual el jugador tenga que actuar

## Definición

un **subjuego** empieza en cualquier nodo de decisión del juego original e incluye todos los nodos de decisión siguientes y sus correspondientes nodos terminales

# Índice

Teoría  
ENPSJ

Ejemplos  
Juegos repetidos: finitos

# Definición

## Definición

un resultado es un **Equilibrio de Nash Perfecto por subjuegos** (ENPSJ) si induce un EN en cada subjuego del juego original

- El ENPSJ es un refinamiento del EN
- El EN es un concepto de equilibrio estático  $\Rightarrow$  no considera la dinámica de la toma de decisiones  $\Rightarrow$  algunos equilibrios se basarán en amenazas no creíbles

# Definición

## Definición

un resultado es un **Equilibrio de Nash Perfecto por subjuegos** (ENPSJ) si induce un EN en cada subjuego del juego original

- El ENPSJ es un refinamiento del EN
- El EN es un concepto de equilibrio estático  $\Rightarrow$  no considera la dinámica de la toma de decisiones  $\Rightarrow$  algunos equilibrios se basarán en amenazas no creíbles



## Ejemplo: batalla de los sexos

- Dos jugadores;  $i = (E)lla, E(L)$
- Acciones:  $c$ - ir al cine a ver una película de acción;  $b$ - ir a bailar
- Ambos prefieren pasar el día juntos, pero  $E$  prefiere ir a bailar mientras que  $L$  prefiere ir a ver una película de acción
- Estructura del juego: primero decide  $E$  qué hacer y luego elige  $L$  sabiendo lo que  $E$  eligió antes
- Representación gráfica:

## Figura

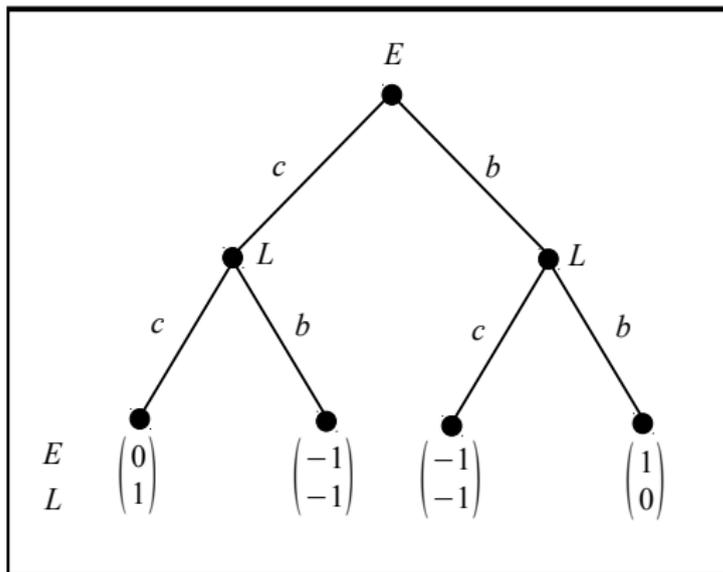


Figura: Juego de la batalla de los sexos.

## Ejemplo (cont.)

- Estrategias:  $S_E = \{c; b\}$ ,  $S_L = \{c, c; c, b; b, b; b, c\}$ .
- $E$  tiene sólo dos acciones en un nodo: decide  $c$  o decide  $b$
- $L$  tiene **dos** acciones en **dos** nodos
- Solución: por inducción hacia atrás.

## Solución

- Etapa 2: vemos que decisión tomaría  $L$  en cada nodo en el que le tocaría jugar
- Gráficamente representamos a la izquierda el subjuego correspondiente al nodo de  $L$  de la izquierda del juego original, y a la derecha el subjuego correspondiente al nodo de  $L$  de la derecha del juego original

# Gráfica

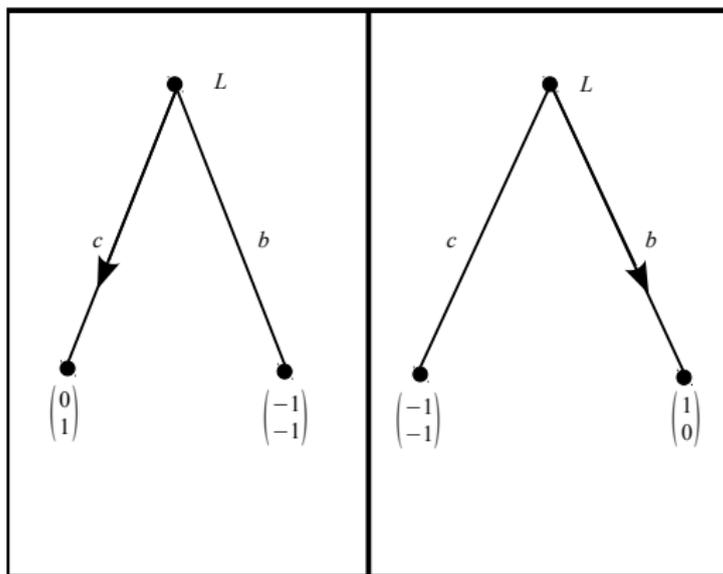
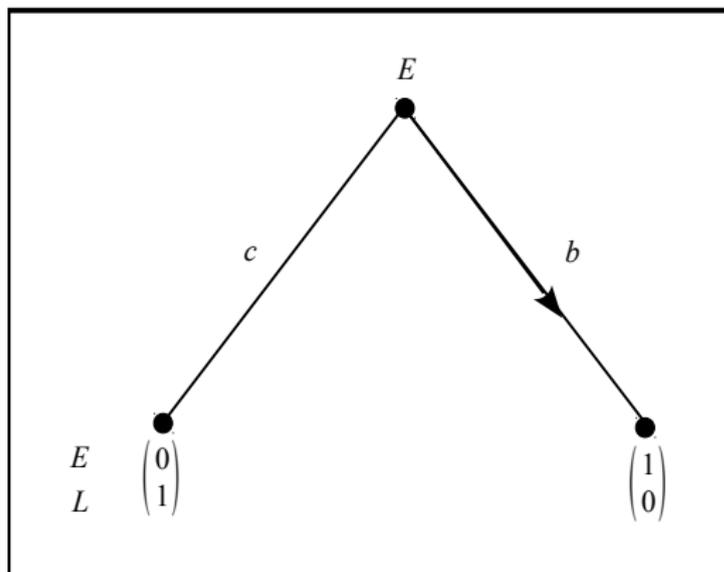


Figura: Subjuegos, con sus correspondientes equilibrios de Nash.

## Solución (cont.)

- El EN del subjuego de la izquierda (si  $E$  juega  $c$ ) es jugar  $c$  ( $1 > 0$ )
- El EN del subjuego de la derecha (si  $E$  juega  $b$ ) es jugar  $b$  ( $0 > -1$ )
- Como era de esperar, el caballero hace lo que la dama diga
- ¿Qué hará entonces  $E$ ?
- La decisión de  $E$  estudiando que haría al enfrentarse con las decisiones de  $L$ , reduciendo el juego original sustituyendo por las decisiones de  $L$ .

## Gráfica



**Figura:** La decisión de  $E$ , tomando en consideración las decisiones de  $L$  posteriores.

## Representación en forma normal

- El juego puede representarse en forma normal

		Jugador L			
		<i>cc</i>	<i>cb</i>	<i>bc</i>	<i>bb</i>
Jugador E	<i>c</i>	0, 1	0, 1	-1,-1	-1,-1
	<i>b</i>	-1,-1	1, 0	-1,-1	1, 0

- ¿Cuántos EN hay en el juego?

## Solución

- Hay 3 EN:  $\{b, cb; b, bb; c, cc\}$

		Jugador L			
		<i>cc</i>	<i>cb</i>	<i>bc</i>	<i>bb</i>
Jugador E	<i>c</i>	<b>0, 1</b>	0, 1	-1,-1	-1,-1
	<i>b</i>	-1,-1	<b>1, 0</b>	-1,-1	<b>1, 0</b>

## Solución (cont.)

- El resultado del juego: el ENPSJ es  $\{b; c, b\}$ .
- Sin embargo, hay dos EN  $\{b, cb; b, bb; c, cc\}$
- En los juegos dinámicos es normal encontrar múltiples EN
- Muchos de ellos no son creíbles, ej.  $\{c, cc\}$

## Ejemplo: entrada al mercado

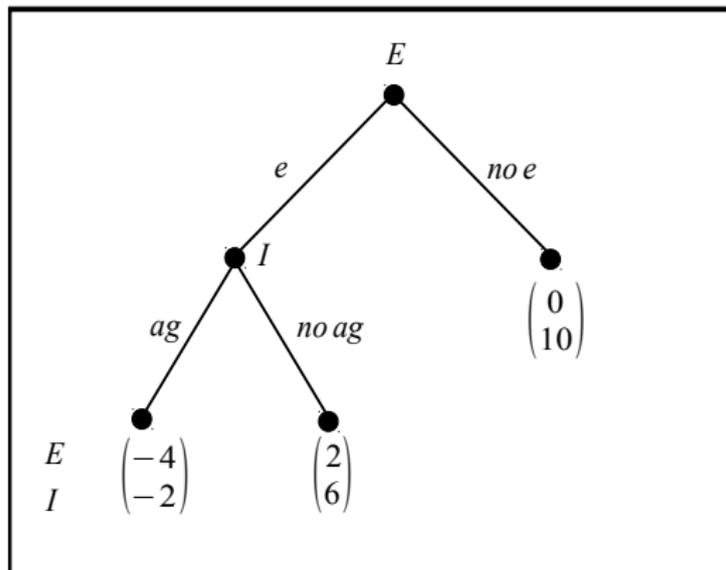


Figura: Juego de entrada al mercado.

## Solución

- Dos jugadores:  $\{I, E\}$
- $E$  decide si entra o no;  $I$  si  $E$  entra decide si es agresivo o no
- Existen dos EN:  $\{e, noag; ne, ag\}$
- Sin embargo,  $ne, ag$  es una amenaza no creíble
- Sólo  $\{e, noag\}$  es un ENPSJ

# Índice

Teoría  
ENPSJ

Ejemplos  
Juegos repetidos: finitos

## Presentación

- Sea  $G = \{I; (S_i)_{i=1}^n; u_i(s_i, s_{-i})\}$  el juego en forma normal en una etapa

### Definición

dado un juego  $G$  en una etapa,  $G(T)$  denota el **juego repetido finito**, en el que  $G$  se juega  $T$  veces, habiendo los jugadores observado los resultados de todas las jugadas anteriores antes de empezar la siguiente. Las ganancias de  $G(T)$  son la suma de las ganancias de los  $T$  juegos de una etapa.

# Proposiciones

## Teorema

*Si el juego en forma normal  $G$  tiene un único EN  $\Rightarrow$  para cualquier  $T$  finito, el juego repetido  $G(T)$  tiene un único ENPSJ: en cada etapa se juega el EN de  $G$*

## Teorema

*Si el juego en forma normal  $G$  tiene múltiples EN  $\Rightarrow$  pueden existir resultados perfectos en subjuegos del juego repetido  $G(T)$  en los que, para cualquier  $t < T$ , el resultado en la etapa  $t$  no sea un EN de  $G$*

## Ejemplo 1

- Sea el juego del dilema del prisionero jugado dos veces

•

		J. 2	
		$I_2$	$D_2$
J. 1	$I_1$	1, 1	5, 0
	$D_1$	0, 5	4, 4

Un período  
(Período 2)

•

		J. 2	
		$I_2$	$D_2$
J. 1	$I_1$	2, 2	6, 1
	$D_1$	1, 6	5, 5

Dos períodos  
(Período 1)

## Ejemplo 1

- Sea el juego del dilema del prisionero jugado dos veces

•

		J. 2	
		$I_2$	$D_2$
J. 1	$I_1$	1, 1	5, 0
	$D_1$	0, 5	4, 4

Un período  
(Período 2)

•

		J. 2	
		$I_2$	$D_2$
J. 1	$I_1$	2, 2	6, 1
	$D_1$	1, 6	5, 5

Dos períodos  
(Período 1)

## Ejemplo 1 (cont.)

- La figura de la izquierda es el juego en una etapa
- La figura de la derecha es el juego en dos etapas que incluye los pagos de la segunda etapa
- Como el EN en una etapa es  $(l_1, l_2) \Rightarrow$  el juego en dos etapas incluye los pagos de jugar  $(l_1, l_2)$  en  $t = 2$
- $\Rightarrow$  el EN es  $(l_1, l_2)$  en  $t = 1$  y  $(l_1, l_2)$  en  $t = 2$

## Ejemplo 2

- Juego del dilema del prisionero modificado

		J. 2		
		$I_2$	$C_2$	$D_2$
J. 1	$I_1$	1, 1	5, 0	0, 0
	$C_1$	0, 5	4, 4	0, 0
	$D_1$	0, 0	0, 0	3, 3

## Ejemplo 2 (cont.)

- El juego en una etapa tiene 2 EN:  $\{(I_1, I_2), (D_1, D_2)\}$
- Ahora es posible que los jugadores prevean equilibrios diferentes en  $t = 2$  para diferentes resultados en  $t = 1$
- Es decir: **cada resultado posible en  $t = 1$  permite que se juegue alguno de los 2 EN**
- Ej.:  $(D_1, D_2)$  en  $t = 2$  si se juega  $(C_1, C_2)$  en  $t = 1$ ; pero  $(I_1, I_2)$  en  $t = 2$  si se juega cualquiera de los otros resultados en  $t = 1$
- La matriz que representa estos pagos es

## Ejemplo 2

		J. 2		
		$I_2$	$C_2$	$D_2$
J. 1	$I_1$	2, 2	6, 1	1, 1
	$C_1$	1, 6	7, 7	1, 1
	$D_1$	1, 1	1, 1	4, 4

## Ejemplo 2

- Este juego tiene 3 EN en estrategias puras:  
 $\{(l_1, l_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2)\}$
- El EN  $(l_1, l_2)$  corresponde a jugar  $(l_1, l_2)$  en  $t = 1$  y en  $t = 2$
- El EN  $(D_1, D_2)$  corresponde a jugar  $(D_1, D_2)$  en  $t = 1$  y  $(l_1, l_2)$  en  $t = 2$
- El EN  $(C_1, C_2)$  corresponde a jugar  $(C_1, C_2)$  en  $t = 1$  y  $(D_1, D_2)$  en  $t = 2$
- Ahora surge la cooperación en  $t = 1$ , aunque de forma poco creíble
- Se prevé jugar  $(l_1, l_2)$  con pagos  $(1, 1)$  en cualquier caso menos si se juega  $(C_1, C_2)$  que prevé jugar  $(D_1, D_2)$  con pagos  $(3, 3)$